一筆劃路徑與司馬庫斯古道

類別：自然理工類
模組單元名稱：一筆劃路徑與司馬庫斯古道
設計人：曾達　　　　　　　　　　　　　　　研習編號：WOLF12126
教學年段：高中學生且已學完高一數學　　　　教學總時數：分四次 共 433 分鐘
教學前準備：(1)將學生分組，每組 4~6 人
　　　　　　(2)準備一些地圖、路線圖或是一些由點與線構成的圖案
　　　　　　　(用途見三和五部份之學習活動)
　　　　　　(3)上課內容之 ptt 檔(視教師需求而定)

一、傳承傳統世界觀

(一) 主要學習概念、學習活動目標與分段能力指標

1.主要學習概念
◎司馬庫斯的泰雅族語 Smangus
◎司馬庫斯古道的開發歷史和功能
2.學習活動目標
◎用泰雅族語說出司馬庫斯
◎認識司馬庫斯古道相關的歷史知識與用途
3.分段能力指標
◎學習原住民優美之語文內容
◎了解居住城鎮(縣市鄉鎮)的人文環境與經濟活動的歷史變遷

(二) 學習活動

1.司馬庫斯的泰雅族語 Smangus(第一次課堂內容 3 分鐘)
於黑板上寫下司馬庫斯的羅馬拼音 Smangus，並帶領學生念誦。
2.司馬庫斯古道的開發歷史(第一次課堂內容 15 分鐘)
講述司馬庫斯古道的相關歷史，亦可請學生於課前先自行蒐尋相關資料來和大家作分享。以下爲參考：

司馬庫斯古道起始於宜蘭縣大同鄉棲蘭附近，向西越過雪山山脈後進入司馬庫斯部落，終點為新竹縣尖石鄉的秀巒村，全長約 20 至 30 公里。此古道於百來年前由泰雅族的大嵙崁群走出，其作用為泰雅族人的獵道。後來，有一名泰雅族先民馬庫斯(Mangus)，在一次遷徙中帶著族人由瑞岩(位於南投縣境內)攀越大霸尖山來到現今司馬庫斯部落的所在地並定居。後人以其尊稱：司馬庫斯(Smangus)來稱呼此部落和經過此地的這條古道。在民國 84 年產業道路通車以前，族人出入部落都需經由斯馬庫斯古道，故此古道亦有輸送物資、從事商業行為等功能。對公路開通後，古道的此一功能逐漸被取代，但因古道經過鴛鴦湖、雪白山等著名自然景點，斯馬庫斯古道也逐漸被賦予了觀光功能，除此之外其也頗受登山愛好者所青睞。

（資料來源：http://citing.hohayan.net.tw/citing_content.asp?id=3191&keyword=台灣的古

道　黃一婷 編著　遠足文化事業有限公司出版）

(一) 學習評量(第一次課堂內容 20 分鐘)

每組發下一張白紙，請每一小組藉由共同討論整理出今日所學習到的觀於司馬庫斯古道的歷史知識與用途，並寫下自己的感想。

二、表達自我世界觀

(一) 主要學習概念、學習活動目標與分段能力指標

1.主要學習概念

◎對司馬庫斯古道的功能(獵道、觀光用途)的看法或經驗

◎對設計打獵、觀光路線的看法或經驗

2.學習活動目標

◎藉由課堂上的小組討論，表達和分享自己對司馬庫斯古道的功能(獵道、觀光用途)的看法，並能對同學提出的觀點作回應。

◎藉由課堂上的小組討論，表達設計打獵、觀光路線的看法，並能對同學提出的觀點作回應。

3.分段能力指標

◎描述自己以及與自己相關的人事物

◎傾聽別人的報告，並做適當的回應

◎能傾聽別人的報告，並能清楚的表達自己的意思

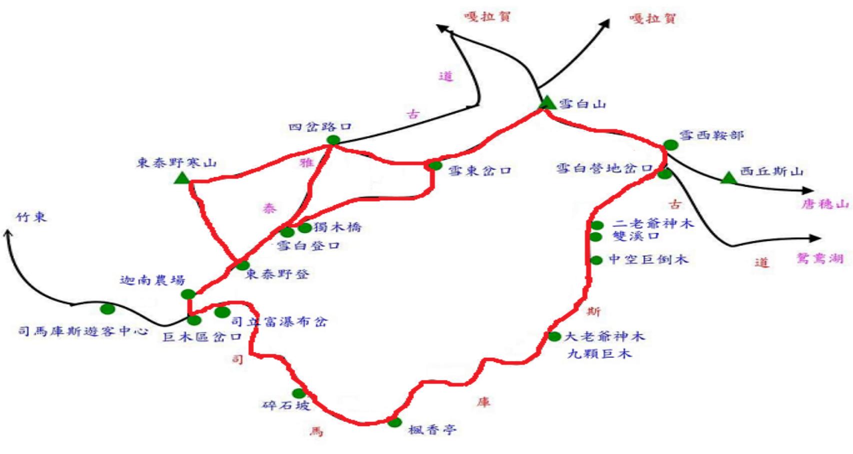
(二) 學習活動與學習評量(第一次課堂內容 30 分鐘)

在黑板上寫下一些問題，讓其做小組討論，並每組派一代表上台報告結果並且鼓勵學生在別人報告完時提出自己的疑問。以下爲參考：

問 1：你曾經和部落中的族人一起去狩獵或登山嗎？分享經驗一則。

問 2：下圖爲司馬庫斯古道與和其相鄰的泰雅古道之部份地圖，若今天你規劃一路線，使我們可由此路線遊歷圖中所有紅色部分，則你希望這一路線具備哪些特性？你覺得你心中的理想路線在這張地圖中有可能被完成嗎？爲什麼？

(附註：在此並不要求以嚴格的邏輯分析去解釋理想路線的存在與否)



(資料來源：http://samshiue.blogspot.com/2010/12/o14.html)

三、探索世界觀

(一) 主要學習概念、學習活動目標與分段能力指標

1.主要學習概念

◎圖形的簡化

◎環狀一筆劃路徑和一筆劃路徑

◎會使一筆劃路徑無法存在的因素

2.學習活動目標

◎將複雜的圖形簡化成只由點和線構成的圖形

◎學習何謂環狀一筆劃路徑和一筆劃路徑

◎由思考與討論得知一些會使一筆劃路徑無法存在的因素

3.分段能力指標

◎找出欲研究之問題的關鍵部分，排除不必要的部分

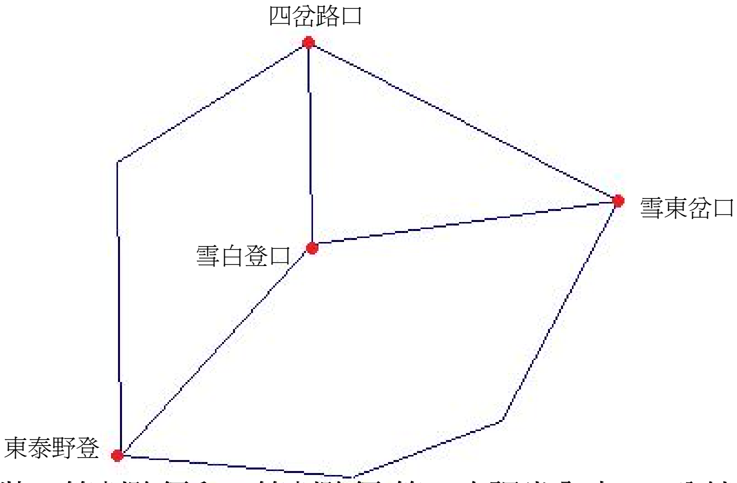
◎找出一命題的必要條件

◎理解簡單的邏輯說明與推導

(二) 學習活動

1.示範如何簡化圖形(第二次課堂內容 15 分鐘)

以下圖紅色部份為例，由教師示範如何將圖形簡化，並說明此簡化並不影響路徑的設計。

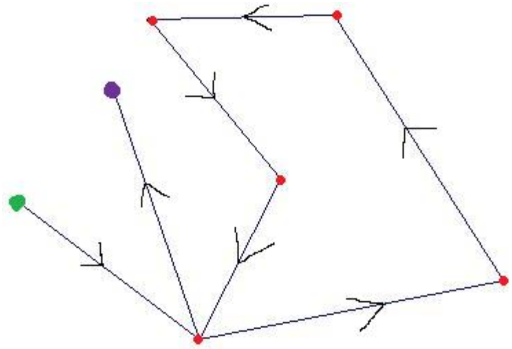


2.介紹環狀一筆劃路徑和一筆劃路徑(第二次課堂內容 10 分鐘)

教師解釋何謂環狀一筆劃路徑和一筆劃路徑，並附圖片作爲例子。以下爲參考：

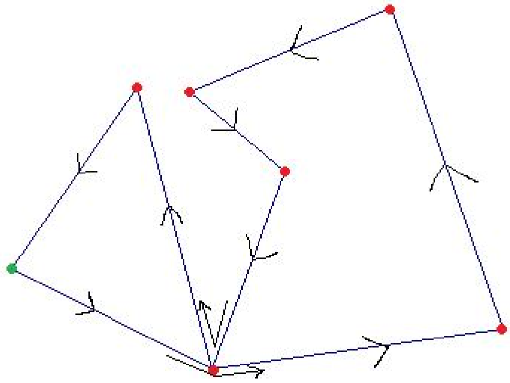
一筆劃路徑：在一由線構成之圖形中能將所有線走遍，並且每一線只經過一次的連續路徑。

例：下圖中，以綠點爲起點，紫點爲終點，延箭頭方向前進之路徑及爲此圖的一個一筆劃路徑



環狀一筆劃路徑：若一一筆劃路徑之起點與終點爲同一點，則稱此路徑爲環狀一筆劃路徑。

例：下圖中，以綠點爲起點和終點，延箭頭方向前進之路徑及爲此圖的一個環狀一筆劃路徑。

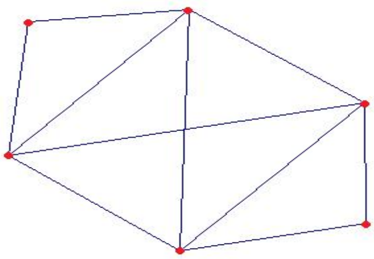


3.使一筆劃路徑無法存在的因素(第二次課堂內容 30 分鐘)

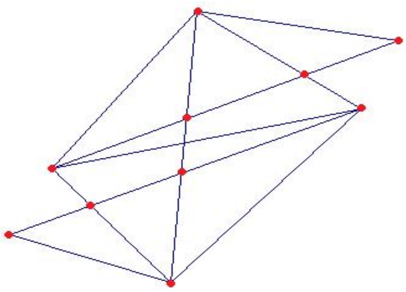
教師給出一些圖，讓學生試著找出其中的一筆劃路徑，並以小組討論的方式引導其思考爲何某些圖找不到一筆劃路徑，若討論均無結果，亦可給予提示或公布答案。

以下爲參考答案：

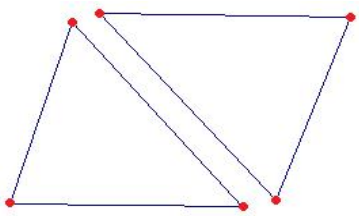
圖(一)



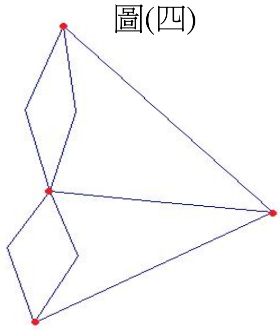
圖(二)



圖(三)



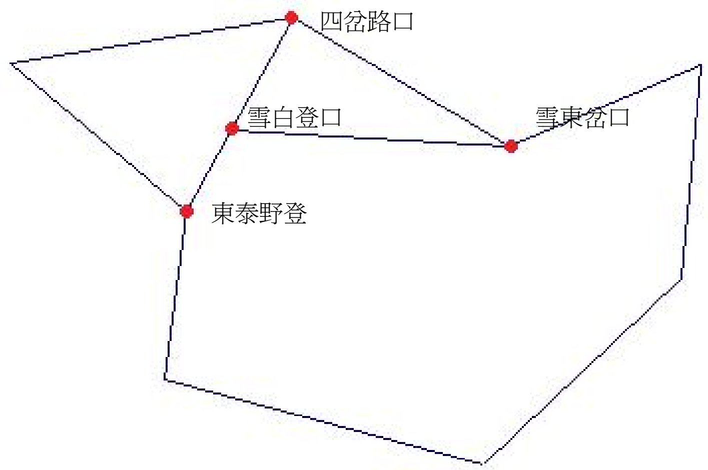
圖(四)



在以上四圖中，圖(一)、圖(二)有一筆劃路徑，圖(三)、圖(四)則沒有。
圖(三)無法有一筆劃路徑的原因：
圖可被分成兩不相接的部分，故無一筆劃路徑。
圖(四)無法有一筆劃路徑的原因：
若一圖有一筆劃路徑，則對於並非起點和終點的頂點而言，此路徑在經過其上時，必定一出一進且最終不會停留在其上，故和該頂點連接的線之數量必為偶數，故此圖和奇數條線連接的頂點的數量必為 0 或 2(起點和終點相異則為 2，相同則為 0)，但圖(四)有 4 個頂點與偶數條線相鄰，故無法有一筆劃路徑。

(三) 學習評量(第二次課堂內容 30 分鐘)

教師將以下問題抄於黑板上，讓學生以小組討論方式，並上台報告回答之。
問 1：你覺得此種簡化圖形的方式會不會對找尋路徑造成影響？為什麼？
問 2：在對司馬庫斯古道的地圖作簡化的時候，如將其簡化成下圖，在找尋一筆劃路徑的時候是否會造成影響？其結果是否會改變？



四、形成新世界觀

(一) 主要學習概念、學習活動目標與分段能力指標

1.主要學習概念
◎圖論(Graph theory)相關的基本知識
◎一個多重圖(multigraph)有尤拉環(Euler cycle) 若且為若其為連通(connect)且其所有頂點(vertex)的 degree 皆為偶數
2.學習活動目標
◎理解、應用圖論(Graph theory)相關的基本知識
◎理解上述定理之證明，並且利用其檢定一個多重圖(multigraph)是否有尤拉環
3.分段能力指標
◎能理解基本的數學敘述與邏輯
◎能接受新的數學定義，並在其下思考、處理其衍生出來的問題
◎能使用以知定理來處理問題
◎能用言語表達自己的邏輯並使別人理解

(二) 學習活動與學習評量

以下出現的數學證明皆爲參考，教師可視情況修改細節

1.圖論(Graph theory)相關的基本知識 (第三次課堂內容 120 分鐘)

由教師來介紹下列名詞，並且每介紹完一個名詞，都給出充足的時間讓學生發問

◎簡單圖(simple graph)的定義：a simple graph G=(V,E) consists of afinite set V of vertices and a set E of edges jioing different pairs of distinct vertices

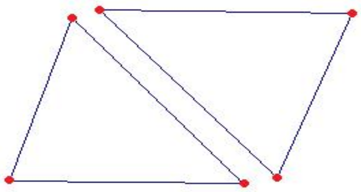
多重圖(multigraph)的定義：a multigraph is a generalized graph that allow more than one edge between pairs of vertices and loops at vertices

教師將上述定義轉爲學生易理解的形式，並講解之。

以下爲範例：

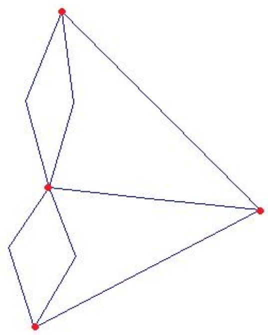
一個簡單圖(simple graph)G 是由兩集合 V、E 所組成，記成(V,E)，其中 V 爲頂點所成的有限集合，E 爲連接不同對相異頂點的邊所成的集合，如將其畫出的話其圖案即爲一個由點線所構成的圖形，且兩點之間至多只能有一條線連接。

Ex：



一個多重圖(multigraph)即是容許兩點之間有多於一條線連接且容許頂點自身連接至自身的圖。

Ex：



(附註：在之後的討論中均對多重圖做討論，但仍稱其爲圖)

◎子圖(subgraph)的定義：$G_0=(V_0, E_0)$稱爲圖 G=(V,E)的子圖，若G_0是圖且$V_0 \subseteq V$　$E_0 \subseteq E$

◎degree 的定義：在一個圖 G 中，一個頂點 v 的 degree 爲和 v 相連的邊的數量，記成 deg(v)

Rmk：若 deg(v)爲奇數，稱 v 爲奇頂點

　　　若 deg(v)爲奇數，稱 v 爲偶頂點

Thm：在任何圖中，所有頂點的 degree 和爲邊的個數的兩倍

Pf：一個頂點的 degree 爲和該頂點相連的邊的數量，而一個邊會和兩頂點相鄰，故頂點的 degree 和爲邊的個數的兩倍。

以下的定理推廣可讓學生分組討論並每組派一代表上台說明如何證明

Cor：在任何圖中，奇頂點的個數為偶數

◎路徑(trail)的定義：在一個圖G中，頂點序列 $x_1, x_2 \cdots x_n$ 稱為路徑，若存在G中的邊 $e_1, e_2 \cdots e_{n-1}$ 使得 e_i 連接 x_i, x_{i+1}，對所有i=1,2,⋯n-1，並且 $e_i \neq e_j$ 對所有i≠j記成 x_1-x_2-⋯-x_n 亦可稱為從 x_1 至 x_n 的路徑(附註：此處說明完後教師可舉一實例，並請每組派代表舉一實例)

◎環(cycle)的定義：在一個圖G中，頂點序列 $x_1, x_2 \cdots x_n$ 稱為環，若 $x_1, x_2 \cdots x_n$ 為路徑且 $x_1 = x_n$

(附註：此處說明完後教師可舉一實例，並請每組派代表舉一實例)

◎連通(connected)的定義：一個圖 G 被稱為連通，若 G 中任兩相異頂點 x,y 均存在從 x 至 y 的路徑(附註：此處說明完後教師可舉一實例，並請每組派代表舉一實例)

◎極大連通子圖(component)的定義：

令圖 $G_0=(V_0, E_0)$ 為圖 G=(V,E)的一個連通子圖，G_0 被稱為 G 的極大連通子圖，若對所有 G 的連通子圖 $G_1=(V_1, E_1)$ 滿足 $V_0 \subseteq V_1$ 和 $E_0 \subseteq E_1$，則 $G_0=G_1$

亦即若 G_0 為極大連通子圖則無法找到一真的比它大且以它為子圖的連通子圖(附註：此處說明完後教師可舉一實例，並請每組派代表舉一實例)

以下三個性質可讓學生分組討論並每組派一代表上台說明如何證明

Prop：1.若 H=(V_H, E_H) 為圖 G=(V,E)的極大連通子圖且 x 為 H 的一頂點，則 $V_H=\{y\in V$ |存在從 x 至 y 在 G 中的路徑$\} \cup \{x\}$

2.若 H 為圖 G 的一極大連通子圖，則任一 H 中的頂點與任一不在 H 中的頂點之間在 G 中不存在路徑

3.若 H_1 和 H_2 皆為圖 G 的極大連通子圖且 H_1 和 H_2 有共用的頂點，則 $H_1=H_2$

◎尤拉環(Euler cycle)的定義：

令 E 為圖 G 的一個環，E 被稱為尤拉環，若 G 的所有邊均被 E 涵蓋且 G 的每一頂點均為 E 的某一項(附註：此處說明完後教師可舉一實例，並請每組派代表舉一實例)

2.證明圖 G 有尤拉環 ⇔ G 為連通且其所有頂點的 degree 皆為偶數(第四次課堂內容 120 分鐘)

由教師於證明、講解此定理

◎圖 G 有尤拉環 ⇒ G 為連通且其所有頂點的 degree 皆為偶數

Pf：令 E= x_1-x_2-⋯-x_n-x_1 為 G 的尤拉環

(i)令 x,y 為 G 的頂點且 x≠y

$\because$ x_1 - x_2 -…- x_n - x_1 爲尤拉環

$\therefore \exists i, j$ 使得 x_i=x x_j=y

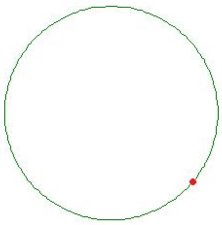
$\Rightarrow$ x_i - x_{i+1} -…- x_{j-1} - x_j 或 x_j - x_{j+1} -…- x_{i-1} - x_i 爲一條從 x 至 y 的路徑

因此 G 爲連通圖

(ii)令 x 爲 G 的頂點，則$\exists a_1 \ a_2 \cdots a_m$ 使得 $x_{a_1} = x_{a_2} = \cdots = x_{a_m}$ =x

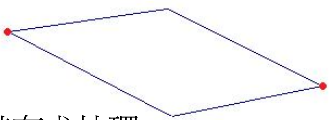
$\because$G 的每一邊皆會在 E 中且不會重複出現
$\therefore$deg(x)=2m 爲一偶數
因此 G 的所有頂點的 degree 皆爲偶數 QED

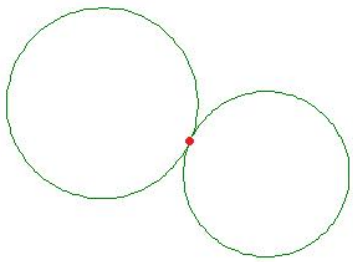
◎圖 G 爲連通且其所有頂點的 degree 皆爲偶數$\Rightarrow$G 有尤拉環
Pf：令 s(n)爲”若 G 爲 n 個邊的連通圖且其所有頂點的 degree 皆爲偶數
則 G 有尤拉環” $\forall n \in \mathbb{N}$
1.當 n=1
令 G 爲 1 個邊的連通圖且其所有頂點的 degree 皆爲偶數
$\because$G 爲 1 個邊的連通圖且其所有頂點的 degree 皆爲偶數
$\therefore$G 之圖行必爲以下之形式



$\Rightarrow$其有尤拉環
因此 s(1)成立

當 n=2
令 G 爲 2 個邊的連通圖且其所有頂點的 degree 皆爲偶數
$\because$G 爲 2 個邊的連通圖且其所有頂點的 degree 皆爲偶數
$\therefore$G 之圖行必爲以下之形式之一





$\Rightarrow$其有尤拉環
因此 s(2)成立

2.設 s(n)成立 $\forall$ n=1,2…k

則 n=k+1 時

令若 G 爲 k+1 個邊的連通圖且其所有頂點的 degree 皆爲偶數

Case1：若 G 的所有邊皆是從頂點自身連接至自身形式，則 G 有
尤拉環

Case2：若並非 G 的所有邊皆是從頂點自身連接至自身形式，
則存在 e 爲 G 的一個邊，其連接頂點 x,y 且 x≠y

將 e 從 G 上移除，得一新的圖 F，則 F 爲有 k 個邊的圖且其恰有兩個奇頂點 x,y

令 H_x 爲 F 的一個極大連通子圖且 x 爲其頂點

∵ H_x 的奇頂點數量爲偶數又 F 的奇頂點只有 x 和 y

∴ y 爲 H_x 的一個頂點

⇒在 F 中存在一條從 x 至 y 的路徑 X(∵ H_x 爲連通圖)

令 X=x-x_1-x_2-⋯-x_n-y

將 X 中的所有邊從 F 中移除，得圖 E，則 E 中的所有頂點的 degree 皆爲偶數(∵X 的起點與終點會被移除奇數條邊其餘則爲偶數條邊)

令 $H_1, H_2 \cdots H_m$ 爲 E 的所有極大連通子圖

Claim：$\forall\ H_i\quad \exists\ h_i \in \{x, x_1, x_2, \cdots, x_n, y\}$使的 h_i 爲 H_i 的一個頂點

Pf of claim：假設 $\exists H_t$ 使的 $x, x_1, x_2, \cdots, x_n, y$ 均不爲其頂點，

則將除去的邊放回後仍無法構造出從 H_t 內部的頂點至 H_t 外部的頂點的路徑

⇒G 非連通圖→←

故$\forall\ H_i\quad \exists\ h_i \in \{x, x_1, x_2, \cdots, x_n, y\}$使的 h_i 爲 H_i 的一個頂點

∵ H_i 爲連通圖且其所有頂點的 degree 皆爲偶數又其邊數介
在 0~k ∀i

∴ H_i 爲只有一頂點的圖或有尤拉環的圖∀i

現在在 F 中從 x 開始，沿 X 走在經過 h_i 時，沿著 H_i 的尤拉環走，將其走完並回到 h_i，繼續沿著 X 走，如此即可構造出一從 x 至 y 路徑，且其涵蓋 F 中所有邊和頂點。在 G 中將此路徑與 e 合併，即得一涵蓋 G 中所有邊和頂點的環

由 1,2 及數學歸納法知若”G 爲 n 個邊的連通圖且其所有頂點的 degree 皆爲偶數，則 G 有尤拉環” $\forall n \in$ □

因此圖 G 爲連通且其所有頂點的 degree 皆爲偶數⇒G 有尤拉環 QED

Cor：圖 G 有一路徑，其涵蓋 G 中所有邊且 G 中每一頂點皆爲該路徑中的某一項⇔G 爲連通且其奇頂點的個數爲 0 或 2

此部分可讓學生分組討論並每組派一代表上台說明如何證明

(仿以上證明之手法或直接引用以上之定理內容都可，亦可提示學生使用以上定理)

五、連結泰雅族世界觀與科學世界觀

(一) 主要學習概念、學習活動目標與分段能力指標

1.主要學習概念

◎上述定理在生活中的應用

2.學習活動目標

◎將在上面學到的定理用來處理生活中的問題

3.分段能力指標

◎找出生活中的問題與數學的關聯，並以數學處理它

◎能正確的使用數學概念和定理處理問題

(二) 學習活動與學習評量(第四次課堂內容 40 分鐘)

發給每個小組許多諸如地圖、路線圖或是一些由點與線構成的圖案，讓他們以小組討論的方式回答下列問題，並每組派一代表上台報告結果

問一：在這些圖片中哪些是圖有一筆化路徑? 哪些沒有? 你是如何知道的?
如要用之前教的定理來回答，你用的是哪一定理? 如何使用?

問二：在這些圖片中哪些是圖有環狀一筆化路徑? 哪些有環狀一筆化路徑?
如要用之前教的定理來回答，你用的是哪一定理? 如何使用?

(附註：此處須注意學生使用定理的方式是否正確)

參考資料：

1.http://citing.hohayan.net.tw/citing_content.asp?id=3191&keyword=

2.台灣的古道　黃一婷 編著　遠足文化事業有限公司出版

3.http://samshiue.blogspot.com/2010/12/o14.html

4.Applied combinatorics 5th edition　Alan Tucker